# Enoncé

**Remarque :** Le premier exercice est repris de la corbeille. Cet exercice étant une preuve de NP-Complétude comme on en fera tout au long de ce Workshop, il est fondamental d’avoir compris cet exercice. Si vous n’avez pas réussi à le terminer en autonomie, vous pouvez commencer par cet exercice. Sinon, passez directement à l’exercice 2.

1. Considérons les deux problèmes Cycle Hamiltonien et Chaine Hamiltonienne.

Cycle Hamiltonien

*Données* : un graphe non orienté *G*.

*Question* : *G* contient-il un cycle hamiltonien ?

Chaine Hamiltonienne

*Données* : un graphe non orienté *G*, deux sommets *u* et *v* distincts de *G*.

*Question* : *G* contient-il une chaine hamiltonienne entre *u* et *v* ?

Supposons que le problème Cycle Hamiltonien est NP-Complet. Il faut prouver que Chaine Hamiltonienne l’est aussi. Pour cela, il faut montrer que le problème Chaine Hamiltonienne est dans NP (donc que la validité d’une solution peut être vérifiée en temps polynomial), et qu’il est NP-Difficile (au moins aussi difficile que n’importe quel problème de NP). Puisqu’il est parmi les problèmes les plus durs de NP, il est NP -Complet.

Rappel : La différence entre une chaine et un cycle est qu’un cycle revient à son point de départ.

1. Montrer que le problème Chaine Hamiltonienne est dans NP :

Considérez :

* une instance ICH du problème Chaine Hamiltonienne, constituée du graphe *G*=(*V*, *E*)
* une suite de sommets SCh = {*u*1,…, *un*} de *V*.

Proposez un algorithme qui prend en entrée ICh et SCh, et qui vérifie si SCh est une chaine hamiltonienne. Prouvez que la complexité asymptotique de cet algorithme est un polynôme de la taille de ICh.

|  |
| --- |
| On doit construire un algorithme vérifiant si SCH est une chaine hamiltonienne dans ICH. Cet algorithme aura trois étapes :  1. Vérifier si SCH est bien une chaine du graphe de ICH, c’est-à-dire s’il existe dans ICH une arête entre chaque paire de sommets successifs de SCH.  2. Parcourir SCH pour vérifier que chaque sommet de ICH n’y apparait qu’une fois.  3. Vérifier si SCH a pour extrémités u et v.  Déterminons la complexité de cet algorithme. On considère que la vérification d’existence d’une arête dans ICH peut se faire en O(1) pour la structure de données considérée1. On considère aussi que la lecture d’un élément dans SCH peut se faire en O(1) pour la structure de données considérée 2. |

1. Montrez que le problème Cycle Hamiltonien se réduit polynômialement au problème Chaine Hamiltonienne :

Considérez un algorithme qui prend en entrée une instance ICy du problème Cycle Hamiltonien, constituée du graphe *G*=(*V*, *E*), et qui retourne l’instance ICh du problème Chaine Hamiltonienne constituée :

* du graphe *G’* obtenu en ajoutant à *G* un sommet *v*, et en le connectant à tous les voisins d’un sommet *u* choisi arbitrairement dans *G*
* des deux sommets *u* et *v*

Dans l’exemple suivant, le sommet choisi pour transformer ICy en ICh est *u* :

ICy

ICh

* + 1. Montrez que la complexité asymptotique de cet algorithme est polynômiale.

|  |
| --- |
| L’instance ICy du problème Cycle Hamiltonien est constituée du graphe G=(V, E). L’instance ICh du problème Chaine Hamiltonienne est constituée :  · du graphe G’ = (V’, E’ ) avec  o V’ = V + {v } avec v ∉ V  o E’ = E ∪ {(v, l ) : l est un voisin de u dans G } avec u un sommet aléatoire de G  · des deux sommets u et v  On suppose que l’ajout du sommet v se fait en O(1) pour la structure de données considérée1. L’ajout des arêtes vers les voisins de u se fait au plus en n-1 opérations (si u est relié à tous les autres sommets de G ). La complexité de cette transformation est donc O(n). |

* + 1. Montrez que s’il existe une chaine hamiltonienne de *u* à *v* dans *G’*, alors il existe un cycle hamiltonien dans *G*.

Dans l’exemple précédent, une solution possible à l’instance ICh du chemin hamiltonien entre *u* et *v* est (*u*, *a*, *b*, *c*, *d*, *v*), et une solution possible à l’instance ICy du cycle hamiltonien est (*u*, *a*, *b*, *c*, *d*, *u*), qui est obtenu en remplaçant *v* par *u* dans la solution de ICh.

**Attention :** Cet exemple sert à illustrer le raisonnement, le but n’est pas de démontrer l’existence d’un cycle dans ce graphe en particulier, mais dans tout graphe obtenu par la transformation présentée au-dessus à partir d’un graphe quelconque.

|  |
| --- |
| Supposons qu’il existe une chaine hamiltonienne dans G’ allant de u à v. Cette chaine est de la forme (u, l1, … , ln-1, v). En effet, les sommets {li } sont les voisins de u dans G, et ce sont dans G’ les seuls sommets reliés à v, par construction de G’.  On en déduit qu’il existe forcément un cycle hamiltonien dans G. Ce cycle est constitué de la chaine précédente, dans laquelle on a remplacé le sommet final v par le sommet u, de manière à constituer un cycle (ce qui est faisable puisque dans la chaine, le prédécesseur de v est aussi un voisin de u). Ce cycle passe une et une fois par chaque sommet de G (à part v puisqu’il s’agit d’un cycle), puisque la chaine dont il est issu passe une et une fois par chaque sommet de G’. |

* + 1. Montrez que s’il n’existe pas de chaine hamiltonienne de *u* à *v* dans *G’*, alors il n’existe pas de cycle hamiltonien dans *G*.

Concluez que le problème est NP-Difficile.

|  |
| --- |
| Supposons qu’il n’existe pas de chaine hamiltonienne de u à v dans G’. Il ne peut exister de cycle hamiltonien dans G. Si ce cycle existait, on pourrait, par la transformation inverse de celle présentée au-dessus, obtenir une chaine dans G’.  S’il existait un algorithme capable de résoudre polynômialement Chaine Hamiltonienne, on pourrait l’utiliser pour résoudre polynômialement Cycle Hamiltonien. Donc, Cycle Hamiltonien ⩽ Chaine Hamiltonienne, et Chaine Hamiltonienne est donc NP-Difficile.  Comme Chaine Hamiltonienne est dans NP, Chaine Hamiltonienne est NP-Complet. |

1. Considérons le problème de décision Chevaliers De La Table Ronde suivant :

Chevaliers De La Table Ronde

*Données* : *n* chevaliers, la liste de toutes les paires de chevaliers ennemis.

*Question* : Existe-t-il un placement des chevaliers autour de la table ronde qui évite à deux chevaliers ennemis d’être assis l’un à côté de l’autre ?

Montrer que le problème Chevaliers De La Table Ronde est NP-Complet.

Un indice : Représentez chaque chevalier par un sommet, et le fait que deux chevalier ne soient pas ennemis par une arête entre les deux sommets correspondants.

Un autre indice : Vous connaissez déjà le problème à utiliser pour la réduction polynomiale.

|  |
| --- |
| Le problème est dans P car étant donné un plan de table, on peut vérifier en temps  polynomial1 si pour chaque chevalier, il n’est pas à côté d’un ennemi.  Nous allons réduire le problème Cycle Hamiltonien au problème Chevaliers De La Table Ronde.  Soit ICH une instance du problème du cycle hamiltonien constituée d’un graphe G=(V, E). Considérons l’instance ICTR du problème Chevaliers De La Table Ronde obtenu de la manière suivante :  · Chaque sommet du graphe est un chevalier.  · S'il n’existe pas d’arête dans G entre deux sommets, les deux chevaliers correspondants sont ennemis.  Cette transformation peut se faire en temps polynomial.  S’il existe un plan de table dans ICH, alors il existe un cycle hamiltonien dans G, alors puisque deux chevaliers voisins ne sont pas ennemis. En effet, un cycle hamiltonien permet de relier deux à deux les sommets de proche en proche. Si un sommet v est entre u et w dans le cycle, cela correspond à placer le chevalier correspondant à v entre ceux correspondant à u et w. Donc si la réponse est oui pour ICTR, elle est aussi oui pour ICH.  De manière symétrique, s’il n’existe pas de plan de table alors il n’existe pas de cycle hamiltonien dans G.  Donc le problème Chevaliers De La Table Ronde est plus difficile que le problème Cycle Hamiltonien. Il est donc NP-Difficile. Comme il appartient à NP, il est donc NP-Complet.  Note : L’ensemble de cette démonstration fait l’impasse sur la modélisation exacte du problème Chevaliers De La Table Ronde. Sans aller jusqu’à définir exactement le codage binaire, il serait tout de même pertinent de proposer une expression algébrique du problème. Vous pouvez vous appuyer sur la représentation des données ci-dessous :  · L’ensemble C ⊂ ℕ des chevaliers, chaque entier correspondant à un chevalier  · Une fonction Ennemi : C↦E avec E ⊂ C, associant à chaque chevalier une liste d’ennemis (concrètement, chaque entier est associé à une liste d’entiers)  Avec cette représentation, vous pouvez exprimer le problème de décision. Attention, la solution de ce problème doit tenir compte de la notion de voisins (ce serait donc une suite d’entiers, ce qui implique un ordre). De plus, une solution acceptable tient compte du fait que la table est ronde (l’opérateur Modulo devrait vous être utile). Une fois ce problème défini, vous pourrez vérifier qu’il est dans NP, puis définir de manière rigoureuse la transformation d’une instance à l’autre, démontrer sa complexité polynomiale, et prouver la conservation des réponses d’une instance à l’autre. |

1. Considérons le problème Voyageur De Commerce :

Voyageur De Commerce

*Données* : Un graphe complet *G* arêtes-valué, et un entier *k*.

*Question* : Existe-t-il un circuit passant au moins une fois par chaque sommet de *G* et dont la somme des valeurs des arêtes est au plus *k* ?

Montrer que Voyageur de Commerce est NP-complet.

|  |
| --- |
| Le problème est dans NP car étant donné une suite de sommets, on peut vérifier en temps polynomial (plus précisément en temps linéaire) si c’est un circuit, s’il passe au moins une fois par chaque sommet, et si son coût est inférieur à k.  Nous allons faire la réduction à partir du problème Cycle Hamiltonien. Le but est de démontrer que, si on était capable de résoudre Voyageur de Commerce en temps polynomial, on pourrait aussi utiliser l'algorithme pour résoudre Cycle Hamiltonien. Or, comme celui-ci est NP-Complet, on en déduit que Voyageur de Commerce est NP-Difficile (et puisqu'il appartient à NP, il est NP-Complet). Pour cela, il faut trouver un moyen de transformer, en temps polynomial, une instance de Cycle Hamiltonien en instance de Voyageur de Commerce, de manière à ce que les deux instances admettent la même réponse.  Voyageur de Commerce considère un graphe complet arête-valué, mais qu'il autorise à passer plusieurs fois par certains sommets, du moment que le circuit total est de taille inférieure à k (on considère le problème de décision sur lequel est basé le problème d'optimisation, k est donc un paramètre d'entrée). L'idée générale de cette réduction polynomiale est de construire l’instance de Cycle Hamiltonien en rajoutant les arêtes manquantes, mais avec une valeur de 2 (et en considérant une valeur de 1 pour les arêtes déjà présentes) de manière à rendre leur usage trop couteux, et en considérant un k correspondant au nombre de sommets (on notera  que cette transformation se fait en temps polynomial). De cette manière, si la réponse à l'instance de Voyageur de Commerce est oui, on sait que le circuit auquel correspond cette réponse passe une et une seule fois par les sommets du graphe, et n'emprunte que les arêtes du graphe de Cycle Hamiltonien. Tout cycle empruntant une des arêtes manquantes dans Cycle Hamiltonien aurait une taille supérieure à k, puisque les autres arêtes qu'on a ajoutées ont une taille supérieure à 1. Idem pour les cycles passant plusieurs fois par un sommet. Donc la réponse pour l'instance de Cycle Hamiltonien est oui aussi. Idem si la réponse est non. Puisqu'on est capable de transformer en temps polynomial une instance de Cycle Hamiltonien en instance de Voyageur de Commerce, de manière à conserver la réponse, Voyageur de Commerce est au moins aussi difficile que Cycle Hamiltonien. Comme Cycle Hamiltonien est NP-Complet, et que Voyageur de Commerce est dans NP, Voyageur de Commerce est NP-Complet.  Plus formellement :  Le problème est dans NP car étant donné une suite de sommets, on peut vérifier en temps en temps linéaire :  · si cette suite de sommets constitue bien un circuit : il faut vérifier qu’elle parcourt bien les sommets de proche en proche (chaque sommet est le voisin du précédent). Cette vérification se fait en temps linéaire.  · si elle passe au moins une fois par chaque sommet. Cette vérification se fait en temps linéaire.  · si son coût est inférieur à k : il faut faire la somme des valeurs des arêtes parcourues par le circuit, et vérifier si cette somme est inférieure à k. Cette vérification se fait en temps linéaire.  Soit ICH une instance du problème Cycle Hamiltonien, constitué du graphe G=(V,E).  Soit IVdC l’instance de Voyageur de Commerce définie par :  · le graphe arête-valué G ’=(V, E(G)+E(𝐺̅), v : E(G )+E(𝐺̅) ↦ ℕ) avec v(u)=1 ∀ u ∈ E(G ) et v(u)=2 ∀ u ∈ E(𝐺̅) (Rappel : 𝐺̅ est le complémentaire de G, il contient les mêmes sommets, et toutes les arêtes qui ne sont pas dans G ).  · l’entier k=|V |-1  Cette instance se construit en temps polynomial : Rechercher toutes les combinaisons de sommets (origine, destination) non présentes dans G se fait en O(|V |²)  Supposons qu’il existe un algorithme résolvant Voyageur de Commerce en temps polynomial. En appliquant cet algorithme sur IVdC :  · Soit on obtient la réponse oui. Dans ce cas, on sait qu’il existe un cycle hamiltonien dans G. En effet, la solution de IVdC est un circuit de longueur |V |-1 par construction de IVdC. Ce  circuit ne peut passer que par des arêtes de G, puisque celles de 𝐺̅ ont un cout de 2, la longueur de cette solution serait supérieure à |V |-1. Par ailleurs, cette solution ne passe qu’une seule fois par chaque sommet, car sinon sa longueur serait supérieure à |V |-1. Ce circuit constitue donc un cycle hamiltonien dans G, la réponse à ICH est donc oui.  · Symétriquement, si la réponse est non, on en déduit qu’il n’existe pas de cycle hamiltonien dans G, car sinon il constituerait une solution à IVdC et la réponse serait oui.  Cycle hamiltonien ⩽ Voyageur de Commerce. Dans la mesure ou Cycle Hamiltonien est dans NP, le problème est NP-Complet. |

1. Considérons le problème Voyageur De Commerce Incomplet :

Voyageur De Commerce Incomplet

*Données* : Un graphe *G* arêtes-valué, et un entier *k*.

*Question* : Existe-t-il un circuit passant au moins une fois par chaque sommet de *G* et dont la somme des valeurs des arêtes est au plus *k* ?

Montrer que Voyageur de Commerce Incomplet est NP-complet :

1. Trouver un moyen de transformer une instance de Voyageur De Commerce Incomplet en une instance de Voyageur De Commerce.

|  |
| --- |
| Le problème du Voyageur de Commerce considère un graphe complet, alors que nous avons un graphe incomplet. Afin d’obtenir un problème dans lequel on peut construire une solution optimale, il faut donc compléter le graphe avec les arêtes manquantes, et ajouter sur ces arêtes des distances correspondant au plus court chemin entre les sommets dans le graphe d’origine |

1. Quelle propriété particulière vérifie le graphe obtenu, plus particulièrement les distances ? Peut-on conclure de la NP-Complétude de Voyageur de Commerce celle de Voyageur De Commerce Incomplet ?

|  |
| --- |
| Le graphe construit respecte l’inégalité triangulaire : ∀ i, j, k ∈ V, P(i−j) ≤ P(i−k)+P(k−j)  De manière informelle, il n’est jamais économique de faire un détour pour aller d’un sommet à un autre.  Cette construction nous ramène donc à un cas particulier de problème Voyageur De Commerce. Cette structure pourrait être exploitée pour trouver une solution optimale en temps polynômial, même si le cas général est NP-Complet. On ne peut donc conclure que Voyageur De Commerce  Incomplet est NP-Complet. C’est une subtilité fondamentale. Le seul fait de savoir que le cas général est NP-Complet ne permet pas de conclure qu’un cas particulier est NP-Complet. Si on considère, par exemple, un graphe en anneau, trouver un cycle hamiltonien est trivial. C’est pourquoi le point suivant est important. |

1. Adapter la démonstration de la question 3. et conclure.

|  |
| --- |
| Le graphe construit respecte l’inégalité triangulaire : ∀ i, j, k ∈ V, P(i−j) ≤ P(i−k)+P(k−j)  De manière informelle, il n’est jamais économique de faire un détour pour aller d’un sommet à un autre.  Cette construction nous ramène donc à un cas particulier de problème Voyageur De Commerce. Cette structure pourrait être exploitée pour trouver une solution optimale en temps polynômial, même si le cas général est NP-Complet. On ne peut donc conclure que Voyageur De Commerce  Incomplet est NP-Complet. C’est une subtilité fondamentale. Le seul fait de savoir que le cas général est NP-Complet ne permet pas de conclure qu’un cas particulier est NP-Complet. Si on considère, par exemple, un graphe en anneau, trouver un cycle hamiltonien est trivial. C’est pourquoi le point suivant est important. |